



Meshless Methods

Soheil Mohammadi

Professor of Computational Mechanics

School of Civil Engineering

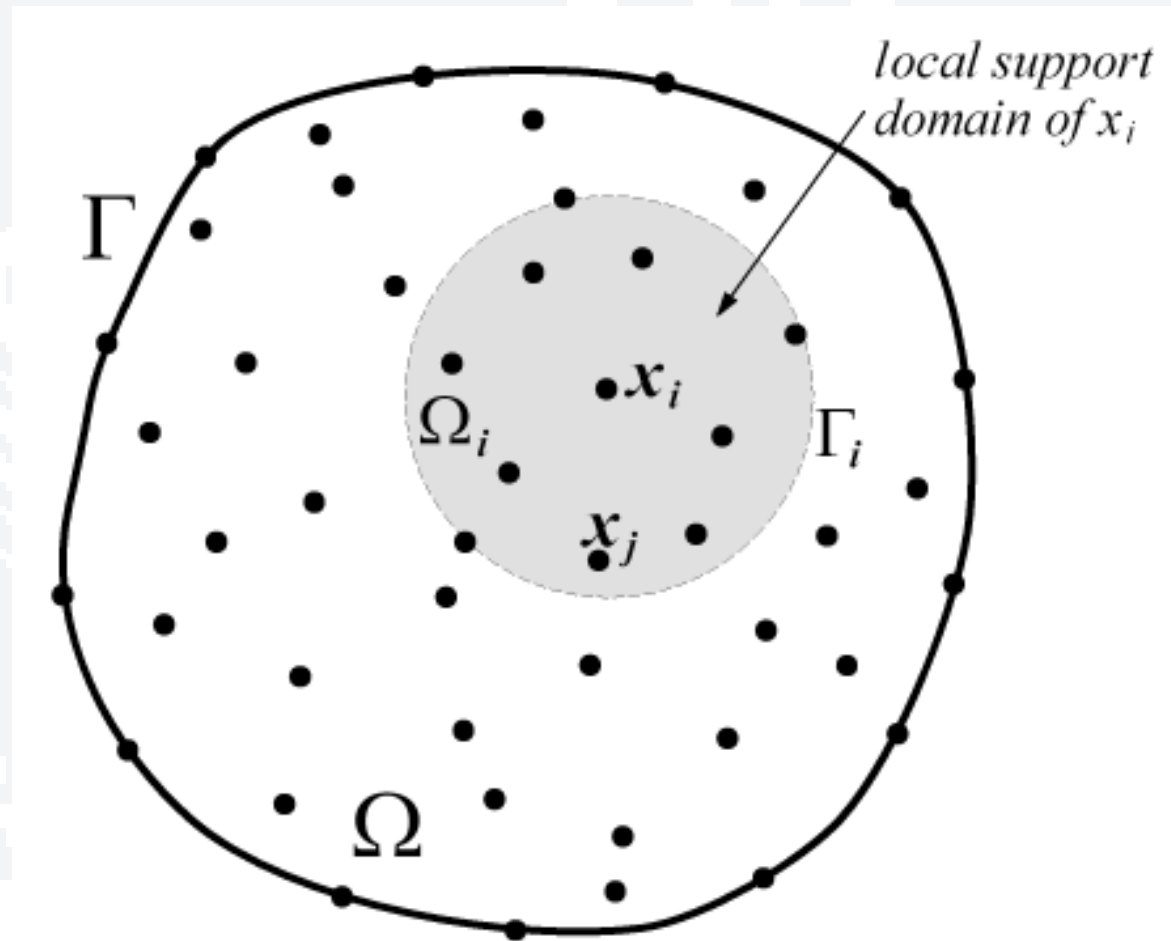
University of Tehran

Tel: +98-21-6111 2258, Fax: +98-21-6640 3808, Cell: +98-912-5030 392

Email: smoham@ut.ac.ir, <http://eng.ut.ac.ir/civ/smohammadi>

Finite Point Method (FPM):

1. Developed by Atluri-Zhu (1998).



Finite Point Method (FPM):

- The strong form of equilibrium equation can be defined as:

$$A(u_j)=0 \quad \text{in } \Omega$$

with $u_j - \bar{u}_j = 0 \quad \text{on } \Gamma_u$

$$B(u_j)=0 \quad \text{on } \Gamma_t$$

- Similar to other strong form solutions, FPM directly applies the equilibrium equation on all nodes. The discrete final form can then be defined as:

$$[A(u_j)]_p = 0 \quad p = 1, 2, \dots, N_r$$

$$[u_j]_s - \bar{u}_j = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N_u$$

$$[B(u_j)]_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N_t$$

Finite Point MMethod (FPM):

- FPM uses WLS or MLS shape functions to approximate the field value around a node:

$$u(x_i) = u^h(x) = N(x_i)U_s = \mathbf{p}^T A^{-1} B U_s$$

- Then the discretized governing equations are modified:

$$\left[A(N(x_j)) U_s \right]_p = 0 \quad p = 1, 2, \dots, N_r$$

$$\left[N(x_j) U_s \right]_s - \bar{u}_j = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N_u$$

$$\left[B(N(x_j)) U_s \right]_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N_t$$

- The final set of simultaneous equations can then be obtained:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{f}$$

Finite Point Method (FPM):

- In order to avoid ill-conditioning of FPM, the following stabilized terms are added :

$$A - \frac{1}{2} h_k \frac{\partial A}{\partial x_k} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u_j - \bar{u}_j = 0 \quad \text{on } \Gamma_u$$

$$B - \frac{1}{2} h_k n_k A = 0 \quad \text{on } \Gamma_t$$

- and the discretized governing equations:

$$\left[A(u_j) - \frac{1}{2} h_k \frac{\partial}{\partial x_k} A(u_j) \right]_p = 0 \quad p = 1, 2, \dots, N_r$$

$$[u_j]_s - \bar{u}_p = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N_u$$

$$\left[B(u_j) - \frac{1}{2} h_k n_k A(u_j) \right]_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N_t$$

Finite Point Method (FPM):

- The final set of stabilized simultaneous equations can then be obtained:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_s(h_k)]\mathbf{u}^h = \mathbf{f}$$

Finite Point Method (FPM):

- FPM is a truly meshless method.
- FPM is far faster than other weak form based methods.
- In comparison to FEM, it does not require any mesh generation.
- In comparison to FDM, it allows for irregular nodal arrangements and efficient enforcement of boundary conditions.

1D tests solved by FPM:

$$W(x - x_I) = \begin{cases} e^{(-r / cr_m)^2} & r \leq r_m \\ 0 & r > r_m \end{cases}$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$$

$$m = 2$$

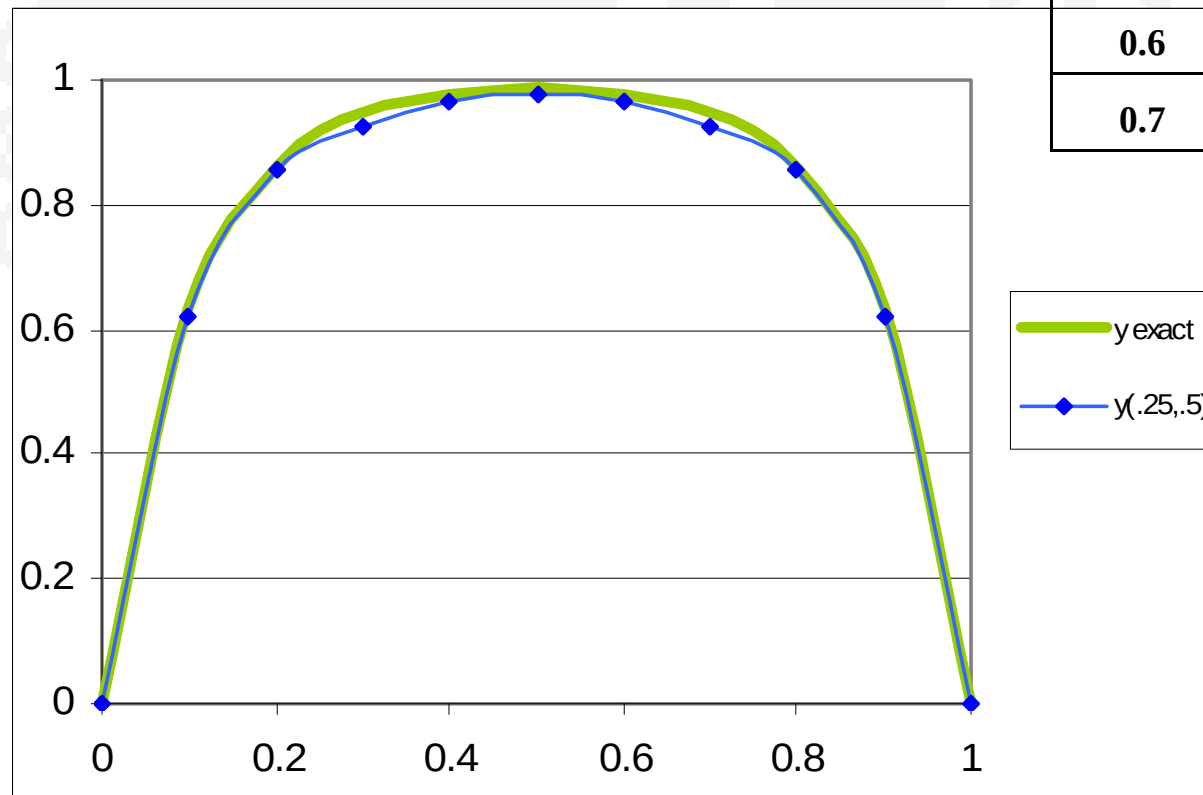
$$err = \frac{\sum_{j=1}^N |u_{FPM}(x_j) - u_{exact}(x_j)|}{N}$$

1D tests solved by FPM:

error

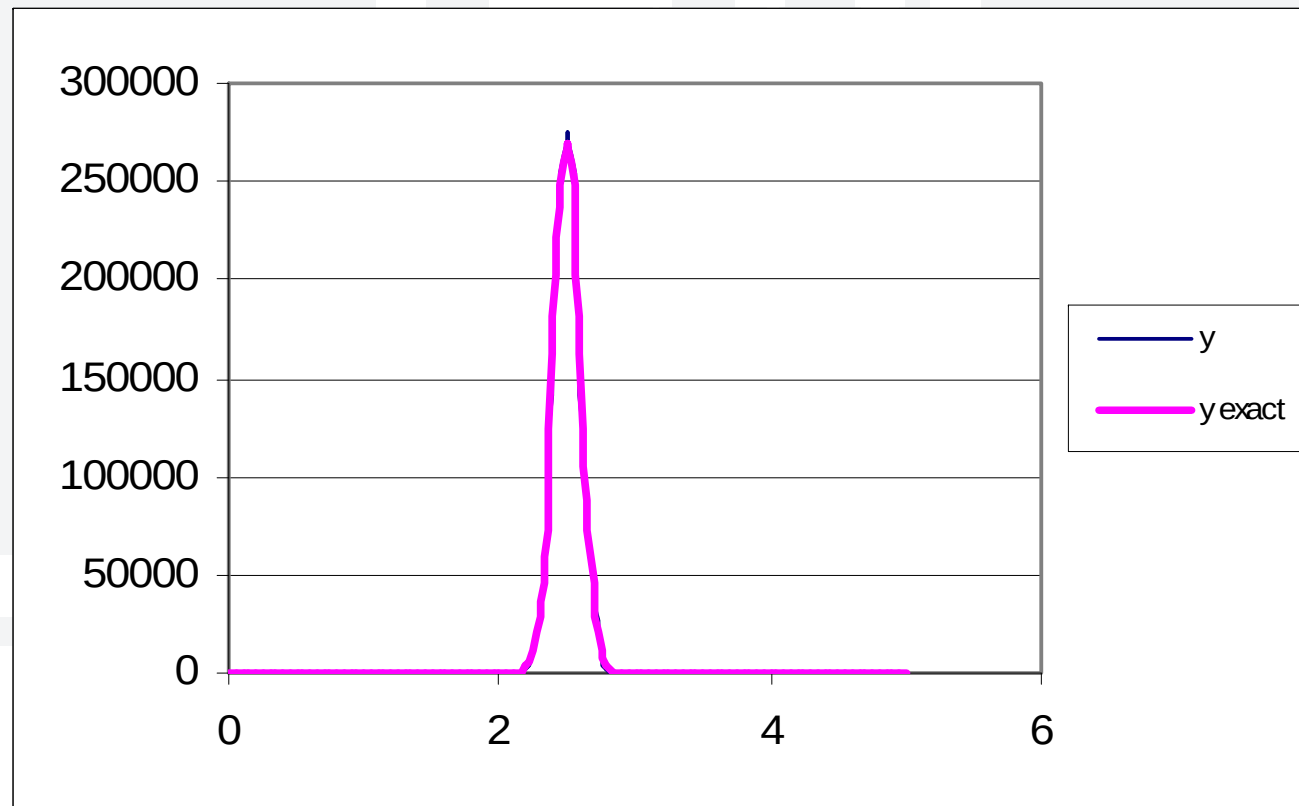
$$\begin{cases} 0.01 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + 1 = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

c	$r_m=.25$	$r_m=.375$	$r_m=.5$
0.2	2.02	1.91	1.71
0.3	1.91	1.56	1.24
0.4	1.68	1.25	2.48
0.5	1.28	2.55	7.24
0.6	1.96	4.72	10.43
0.7	4.48	14.48	8.15



1D tests solved by FPM:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-100 + (-100x + 250)^2) e^{(-50(-x+3)(x-2))} & 0 < x < 5 \\ u(0) = u(5) = e^{(-300)} \end{cases}$$

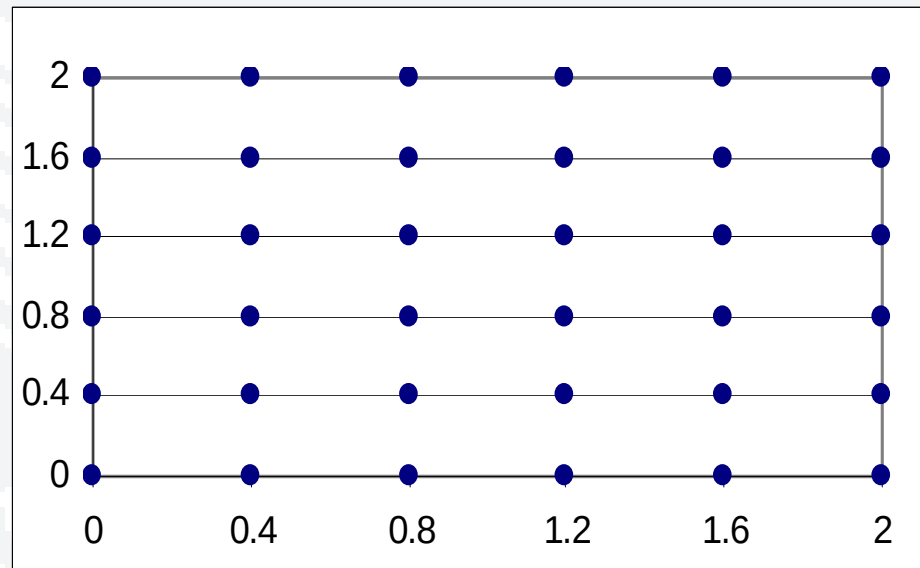


2D tests solved by FPM:

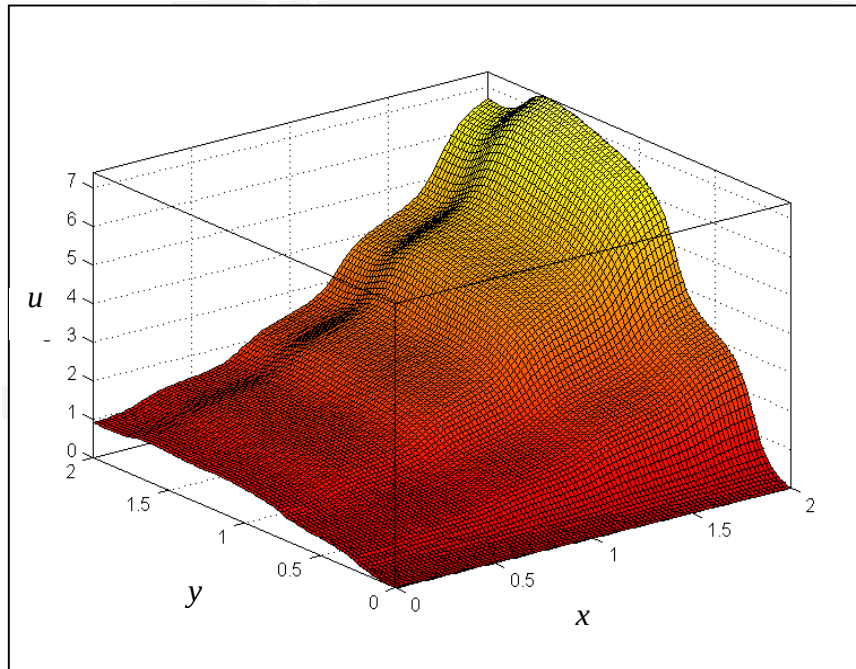
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 2 \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = \sin(y) \quad @ x = 0, u(2, y) = e^2 * \sin(y) \quad @ x = 2$$

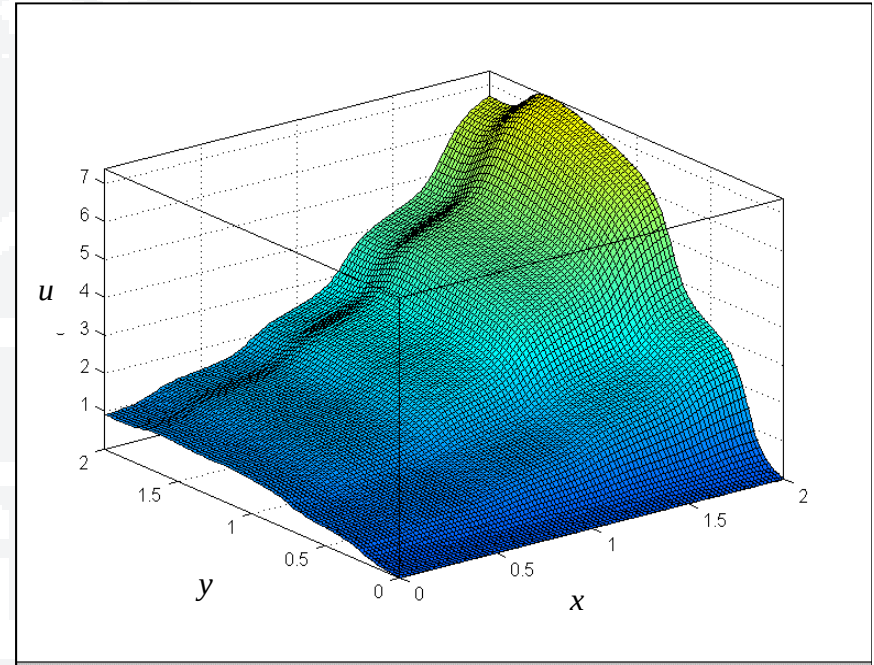
$$u(x, 0) = 0 \quad @ y = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(2) * e^x \quad @ y = 2$$



2D tests solved by FPM:



Exact solution



FPM solution

c	$r_m=.8$	$r_m=1.2$
0.2	1.74	1.45
0.3	1.49	1.19
0.4	1.08	3.13
0.5	1.82	5.55

Error

Plate bending by FPM:

- The governing PDE of plate bending problems can be expressed as:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^4 w = \frac{P(x, y)}{D}$$

- With the following boundary conditions along the edge $x=a$ of a rectangular plate parallel to xy axes:
 - Fixed edge : $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ $(x = a)$
 - Simple edge: $w = 0$, $M_x = 0$ $(x = a)$
 - Free edge: $V_x = 0$, $M_x = 0$ $(x = a)$

Plate bending by FPM:

- The governing PDE of plate bending problems can be expressed as:

$$w_i = p(x) A^{-1} B \bar{W}$$

$$\left[(\nabla^4 p(x) A^{-1} B) \bar{W} \right]_i = \frac{P_i(x, y)}{D} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

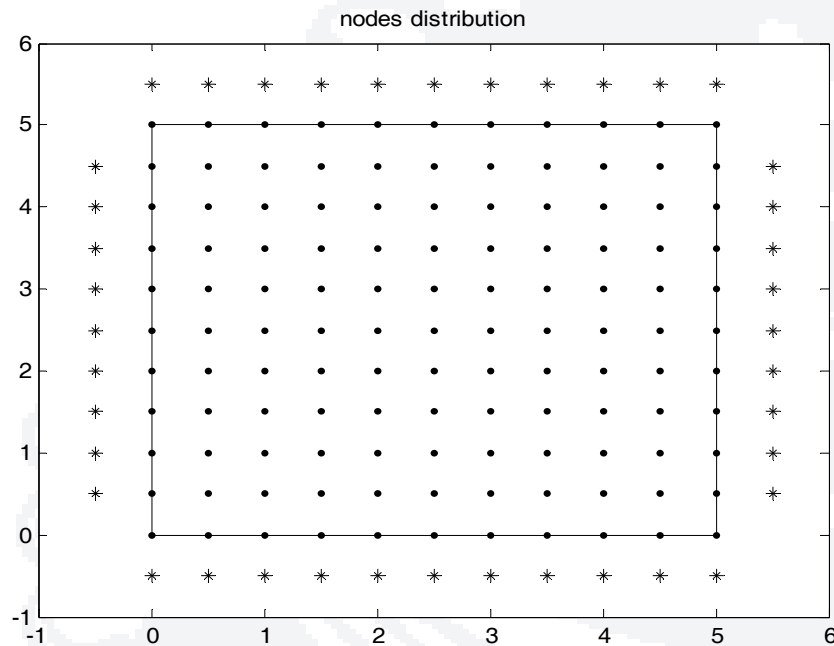
- Assuming simple edges for the rectangular $a \times b$ plate:

$$\begin{aligned} (x=0, a) & \begin{cases} M_x = \left[-D \left(\frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial y^2} \right) W_s \right]_s = 0 & s = 1, 2, \dots, N_u \\ \left[p(x, y) A^{-1} B \bar{W} \right]_s = 0 & s = 1, 2, \dots, N_u \end{cases} \\ (y=0, b) & \begin{cases} M_y = \left[-D \left(\frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial x^2} \right) W_s \right]_s = 0 & s = 1, 2, \dots, N_t \\ \left[p(x, y) A^{-1} B \bar{W} \right]_s = 0 & s = 1, 2, \dots, N_t \end{cases} \end{aligned}$$

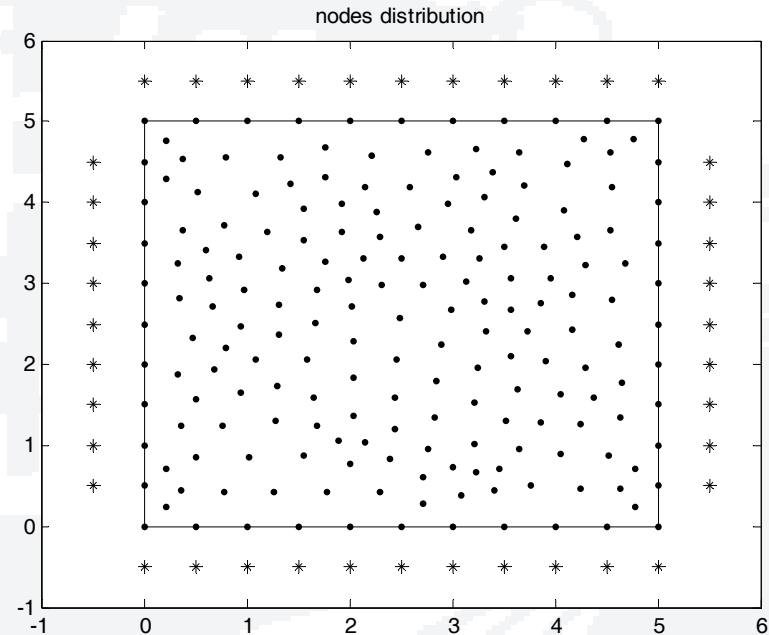
Plate bending by FPM:

- In order to enforce two boundary conditions at any node:
 - Only one condition is selectively enforced at each node. This will lead to the reduction of accuracy.
 - Defining two sets of variables (degrees of freedom) at each boundary node.
 - Defining extra (ghost) nodes on the boundary. This is an extension to the usual procedure in FDM.

Square Plate Bending by FPM:

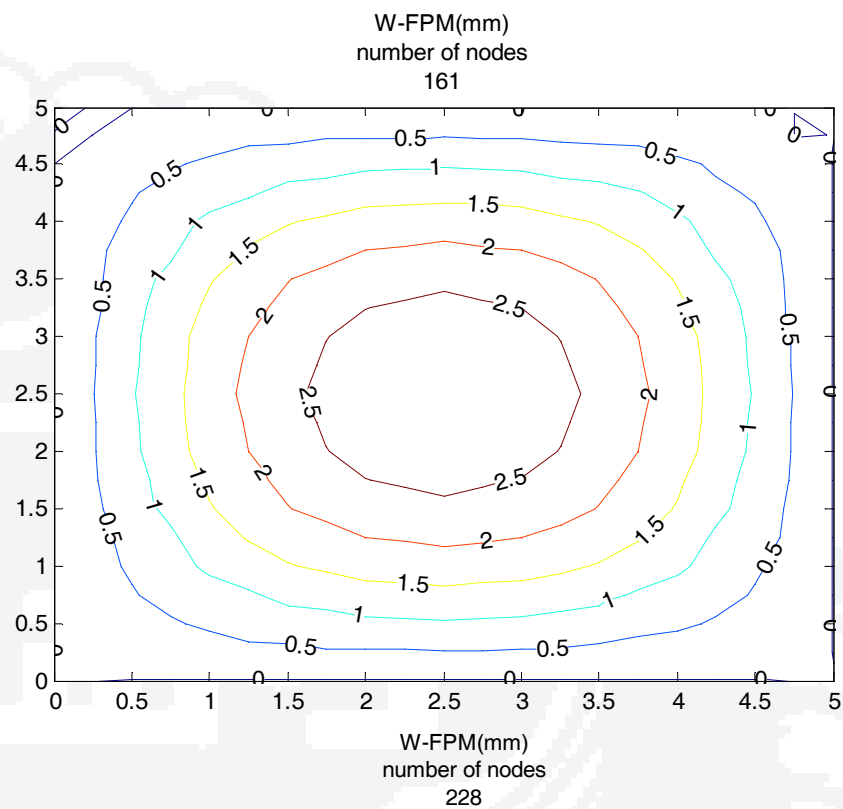
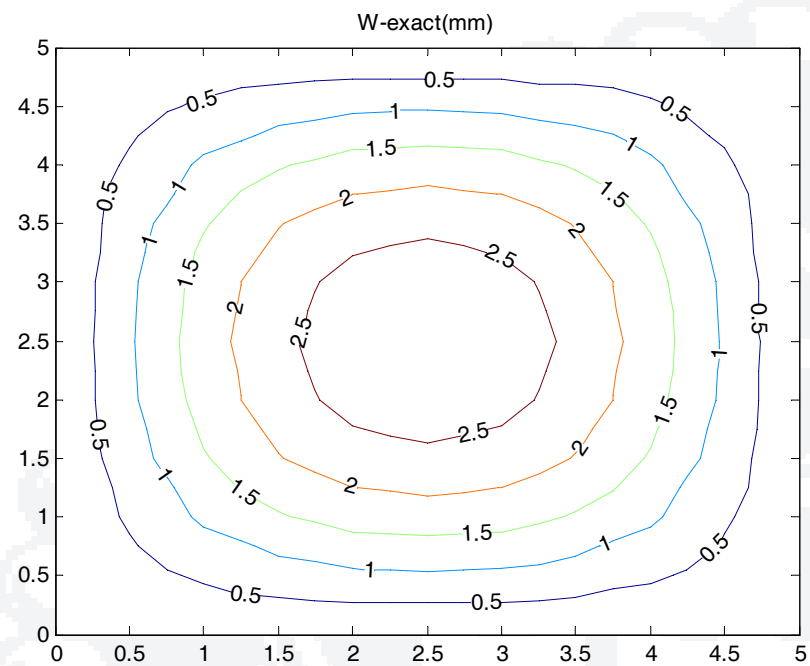


161 Nodes



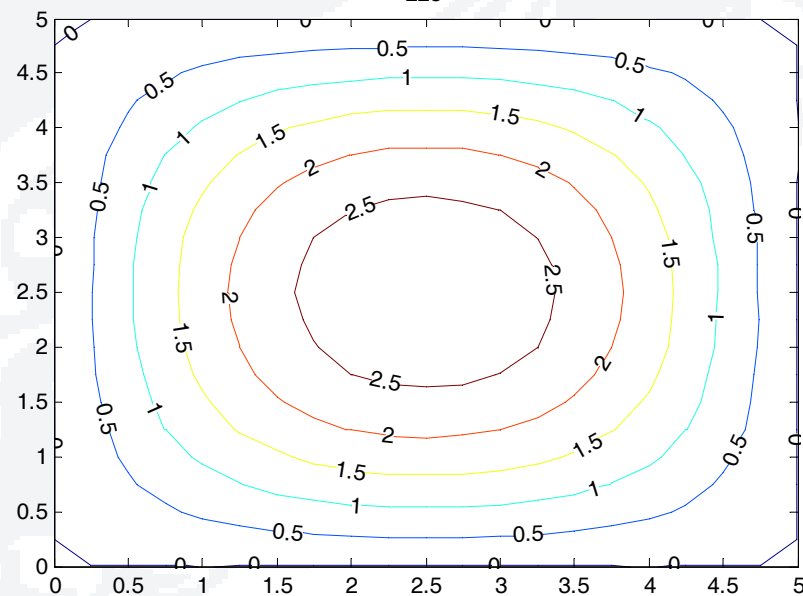
228 Nodes

$$w = \sum_{\substack{m=1,3,\dots,\infty \\ n=1,3,\dots,\infty}} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad w_{mn} = \frac{\left(\frac{16q_0}{\pi^2 m n}\right)}{D\left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2 \pi^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4}\right)}$$

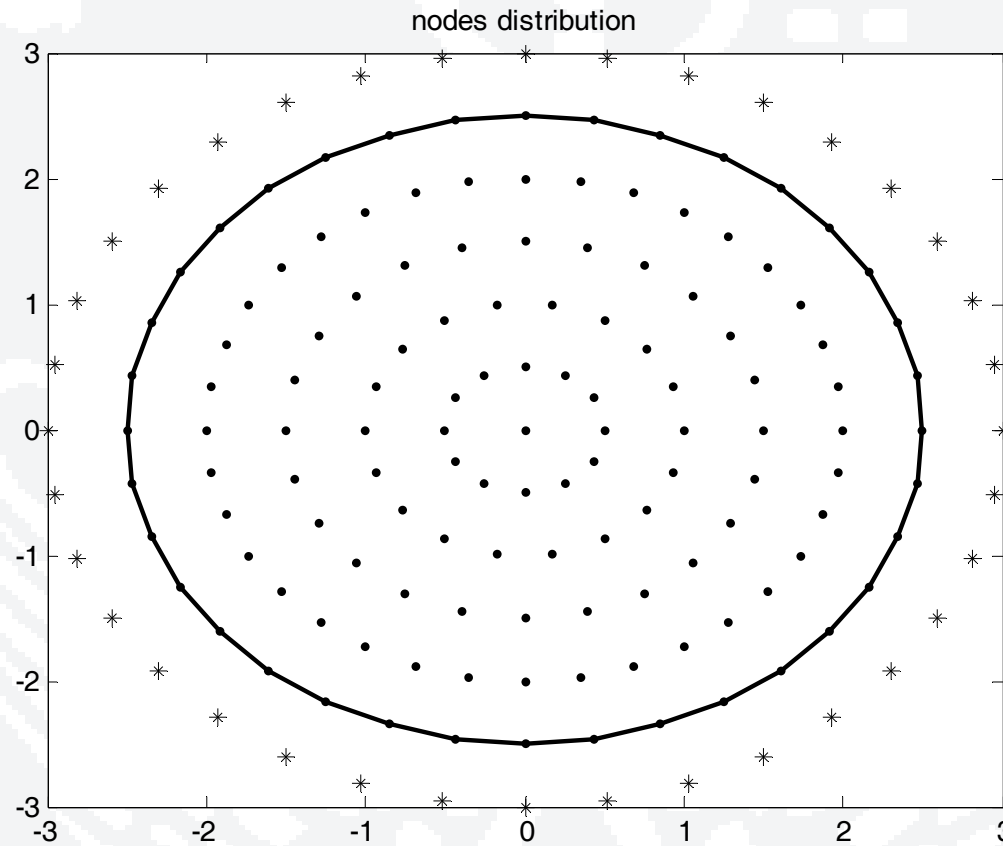


$$err_{161} = \frac{\sum_{j=1}^N |w_{FPM}(x_j) - w_{exact}(x_j)|}{N} = 0.41\%$$

$$err_{228} = \frac{\sum_{j=1}^N |w_{FPM}(x_j) - w_{exact}(x_j)|}{N} = 0.81\%$$

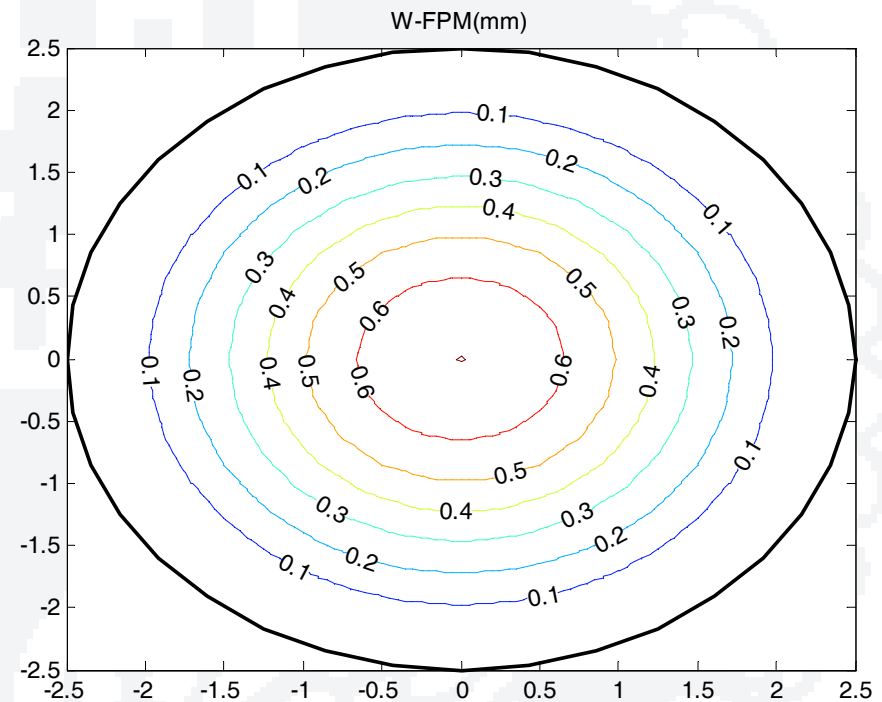
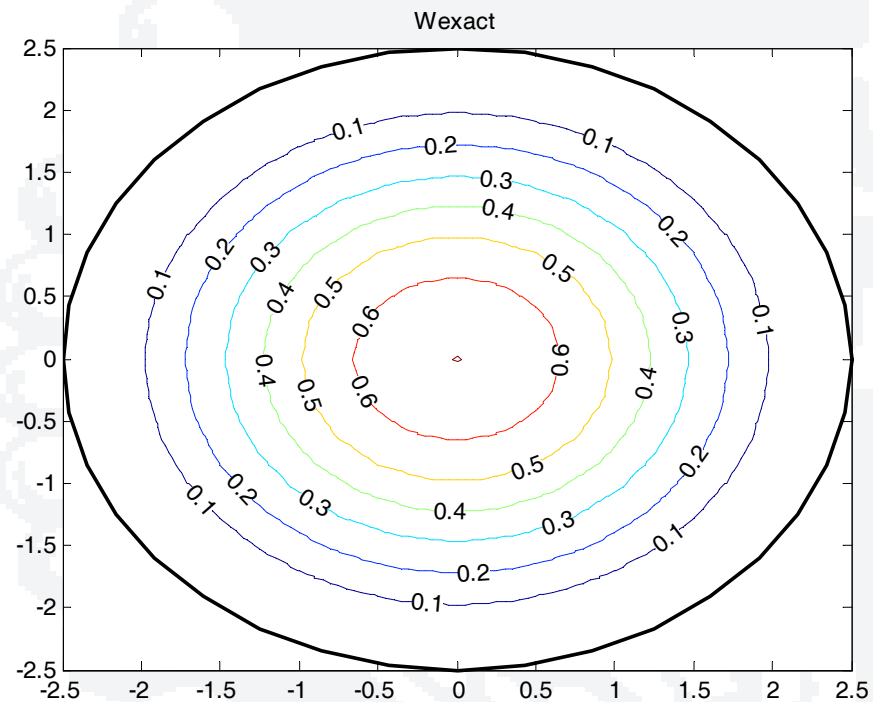


Clamped Circular Plate Bending by FPM:



$$w = \frac{q_0}{64D} (r_0^2 - r^2)^2$$

Clamped Circular Plate Bending by FPM:

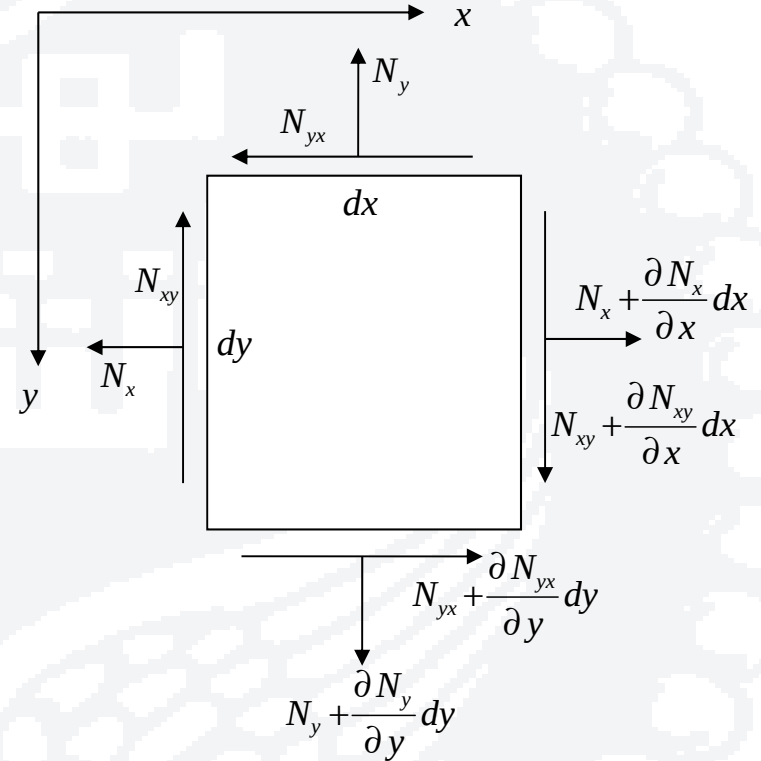


Flexible Plates by FPM:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0$$

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left(p_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial xy} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p_x \frac{\partial w}{\partial x} - p_y \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$



Flexible Plates by FPM:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Et} (N_x - \nu N_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Et} (N_y - \nu N_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{Gt}$$

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right]$$

$$N_y = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$N_{xy} = \left(\frac{Et}{2(1+\nu)} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

Flexible Plates by FPM:

$$1) - \frac{\partial \left(\frac{Et}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\left(\frac{Et}{2(1+\nu)} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right)}{\partial y} + p_x = 0$$

$$2) - \frac{\partial \left(\frac{Et}{1-\nu^2} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\left(\frac{Et}{2(1+\nu)} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right)}{\partial x} + p_y = 0$$

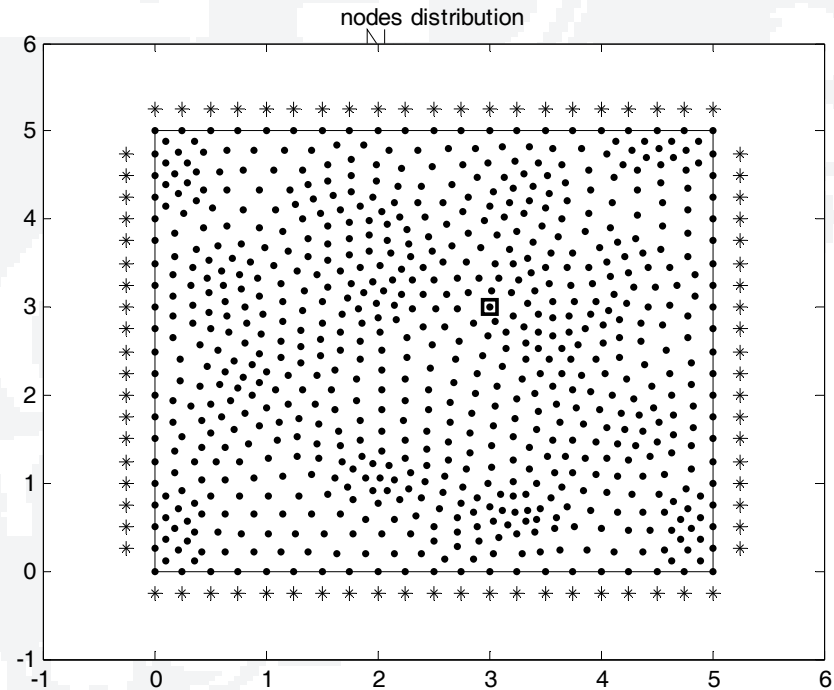
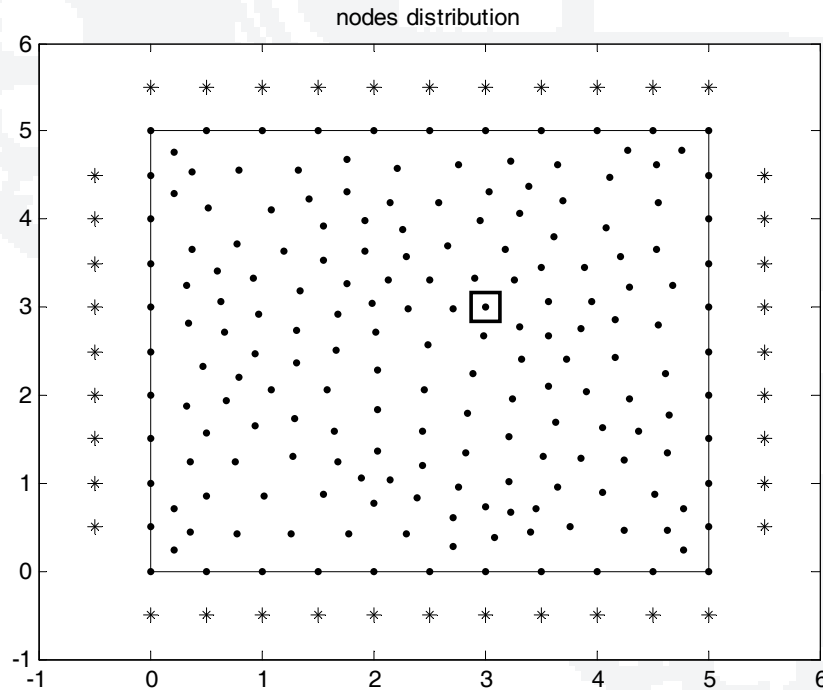
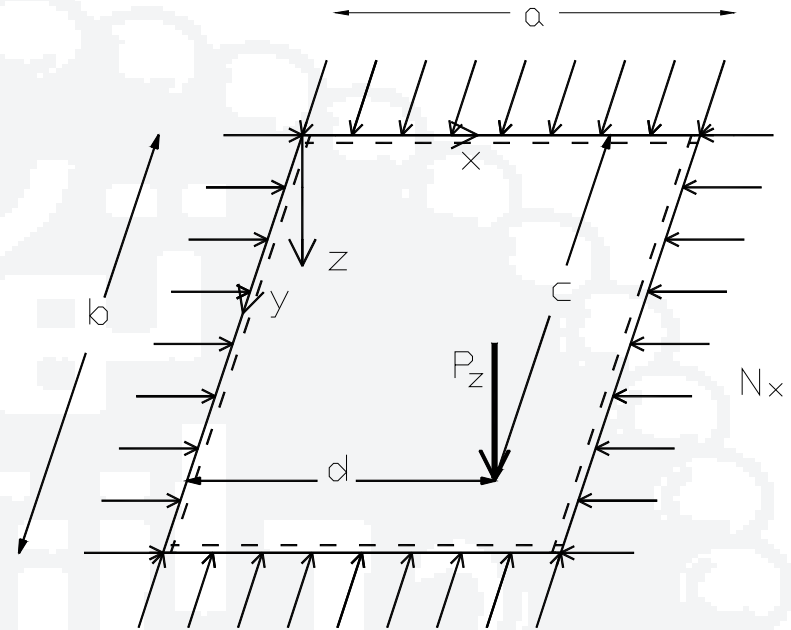
$$3) - D \nabla^4 w - C \left(\left(\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ \left. \left(\left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right) \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) = p_z$$

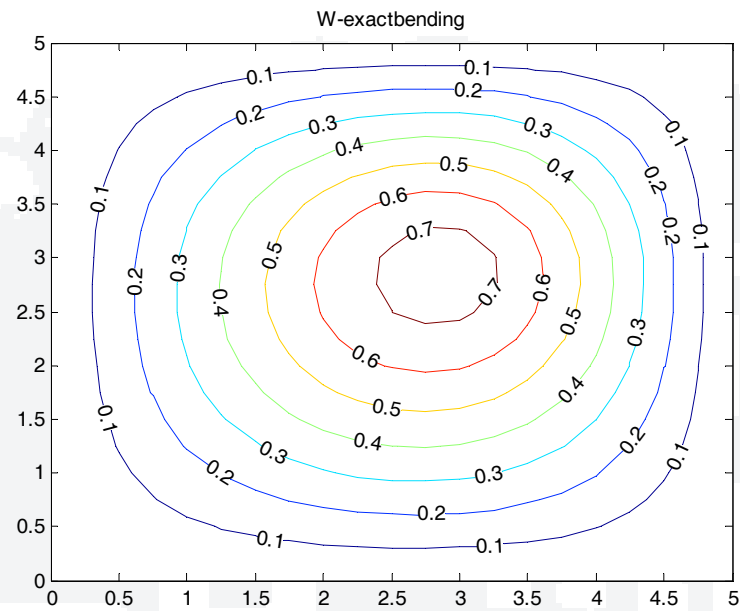
$$C = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

Flexible Plates by FPM:

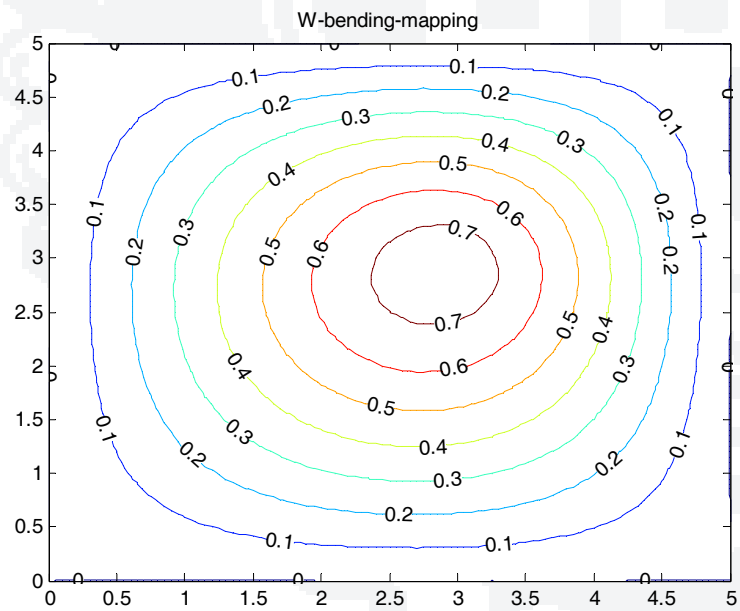
$$w_{exact} = \frac{4P_z}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$A = \frac{\sin \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{n\pi c}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} - \frac{n^2 N_y}{\pi^2 b^2 D}}$$

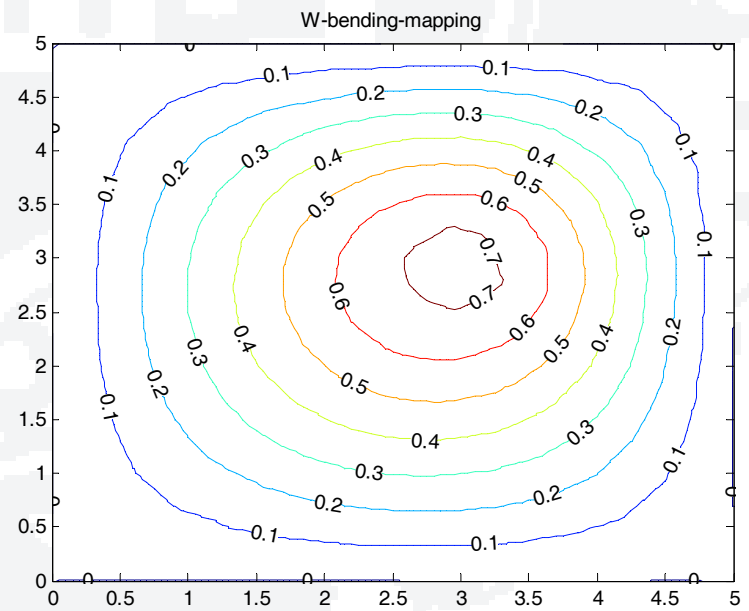




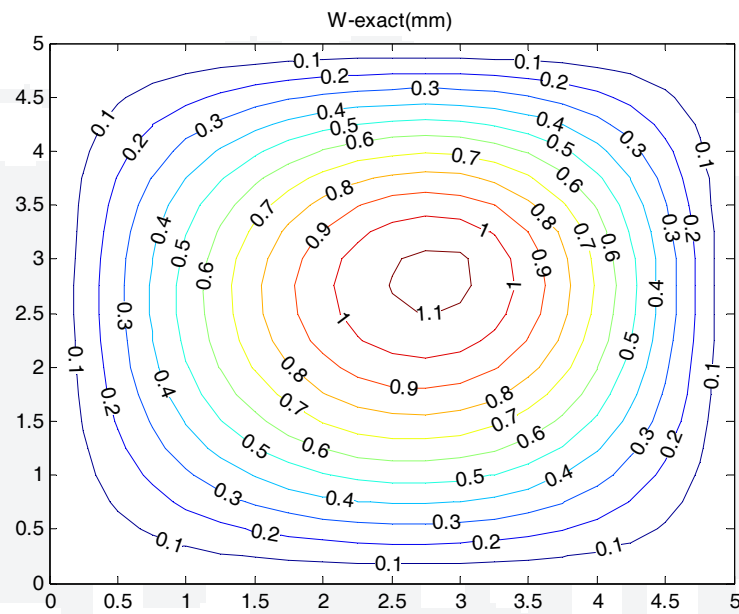
exact



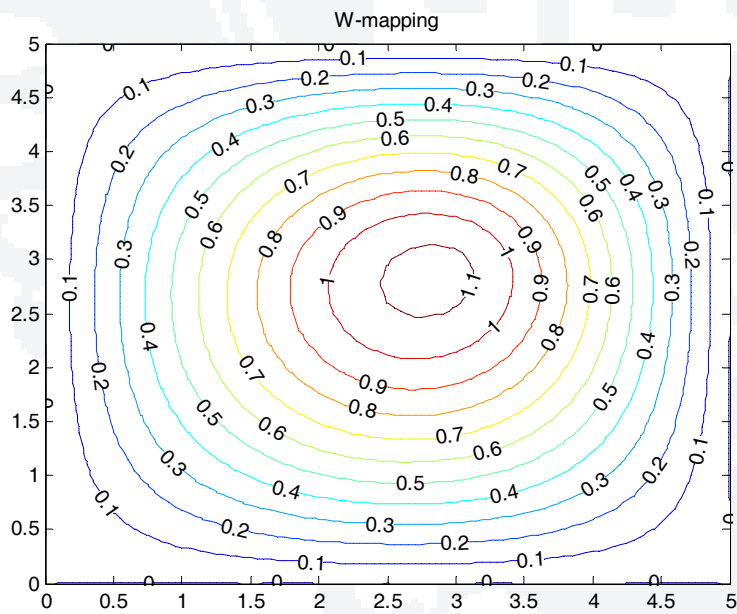
788 Points



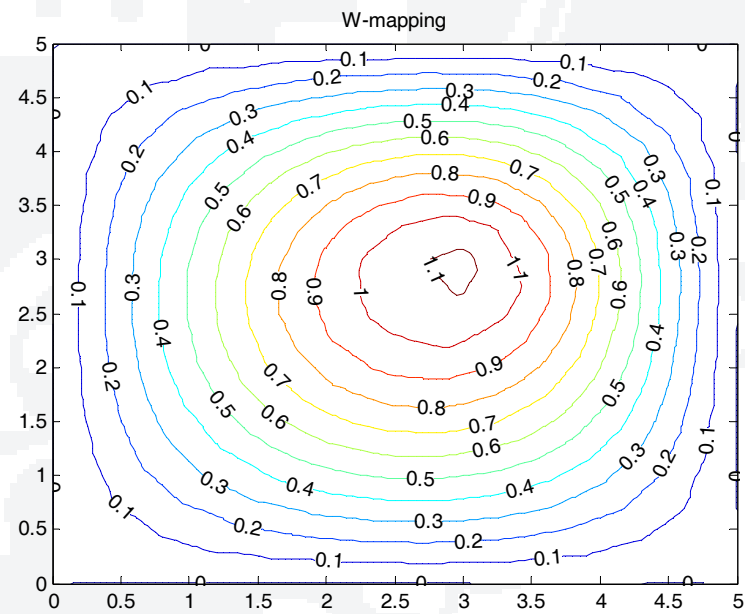
228 Points



exact



788 Points



228 Points

حل مسائل انتشار یون کلر در سازه های بتنی و محاسبه عمر مفید سازه های بتنی با استفاده از روش نقاط محدود

معادلات حاکم بر انتشار یون کلر در بتن

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(t) \nabla^2 C$$

- C مقدار کلر
- t زمان و به عبارت دیگر عمر سازه بتنی
- D ضریب پخش یون کلر در بتن

$$D(t, T) = D_{ref} \left(\frac{t_{ref}}{t} \right)^{m_c} \exp \left[\frac{U}{R} \left(\frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right) \right]$$

- $D(t, T)$: ضریب پخش یون کلر در زمان t و دمای T
- D_{ref} : ضریب پخش یون کلر در زمان t_{ref} و T_{ref}
- U : انرژی آزاد شده در پروسه پخش شونده
- T : دمای مطلق سازه به درجه کلوین است.
- R : ثابت گازی
- m_c : ضریب ثابت

حل معادله انتشار یون کلر با استفاده از روش نقاط محدود

C_s برداری است حاوی مقدار C در نقاطی که در زیر دامنه نقطه مورد نظر قرار دارند

$$C^h = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} C_s = \Phi C_s$$

$$\frac{C_{i+1}^h - C_i^h}{\Delta t} = D(t) \nabla^2 \Phi C_s$$

$$C^h = \Phi C_s = 0$$

$$C^h = \Phi C_s = C_0$$

حل تحلیلی معادله انتشار

حالت یک بعدی

شرایط مرزی

$$\begin{cases} I.C : C = 0, & 0 < x < L, \quad t = 0 \\ B.C : C = C_0, & x = 0, \quad x = L, \quad t > 0 \end{cases}$$

$$C = C_0 - \frac{4C_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \exp \left\{ -D \left(\frac{(2n+1)\pi}{L} \right)^2 t \right\}$$

حل تحلیلی معادله انتشار

حالت دو بعدی:

برای دامنه مستطیلی شکل به طول H و عرض L و با شرایط مرزی :

$$\left| \begin{array}{l} I.C : C = 0, \quad 0 < x < L, 0 < y < H, \quad t = 0 \\ B.C : C = C_0, \quad x = 0, \quad x = L, y = 0, y = H, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$C = C_0 - \frac{16C_0}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi y}{H}\right) F(t)$$

$$F(t) = \exp\left\{-D \left[\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{H}\right)^2 \right] t\right\}$$

$$A_{mn} = \left(\frac{1}{2n+1}\right) \left(\frac{1}{2m+1}\right)$$

برای دامنه به صورت دایره ای شکل با شعاع R و شرایط مرزی :

$$\left| \begin{array}{l} I.C : C = 0, \quad 0 < r < R, \quad t = 0 \\ B.C : C = C_0, \quad r = R, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$C(r, t) = C_0 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j r) \exp(-\alpha_j^2 D t)$$

$$A_j = \frac{2}{R^2 [J_1(\alpha_j R)]^2} \int_0^R r C_0 J_0(\alpha_j r) dr$$

$$J_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

J_0 ترم اول تابع بسل از مرتبه صفر و α_j ریشه های مثبت معادله $J_0(\alpha R) = 0 \quad (j=1, 2, \dots)$ می باشد.

مسائل حل شده

$$m=3 \quad 1D$$

$$m=6 \quad 2D$$

شعاع زیر دامنه برای هر نقطه به صورت جداگانه و برابر با $I_m = \alpha I_{min}$ فرض شده که α مقدار ثابت و I_{min} مقدار شعاع زیر دامنه بری هر نقطه است که حداقل ۳ و ۶ نقطه برای حالت یک بعدی و دو بعدی در آن زیر دامنه وجود داشته باشد .

$$W(x - x_I) = \begin{cases} e^{(-r/cr_m)^2} & r \leq r_m \\ 0 & r > r_m \end{cases} \quad \text{تابع وزنی :}$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$$

$$c = 0.3$$

$$\alpha = 1.4$$

دیگر فرضهای حل مساله :

$$U = 35000 \text{ j/mol}$$

$$R = 8.3143 \text{ joules per Kelvin per mole.}$$

$$t_{ref} = 28 \text{ days}$$

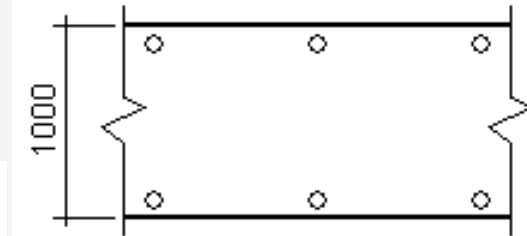
$$T_{ref} = 293^\circ \text{ K } (20^\circ \text{ C})$$

حالت یک بعدی

ضریب انتشار ثابت

Thickness (mm)	Cover (mm)	D (m ² /s)	m _c	C _t %
1000	50	10 ⁻¹²	0	0.1

مشخصات دال بتنی

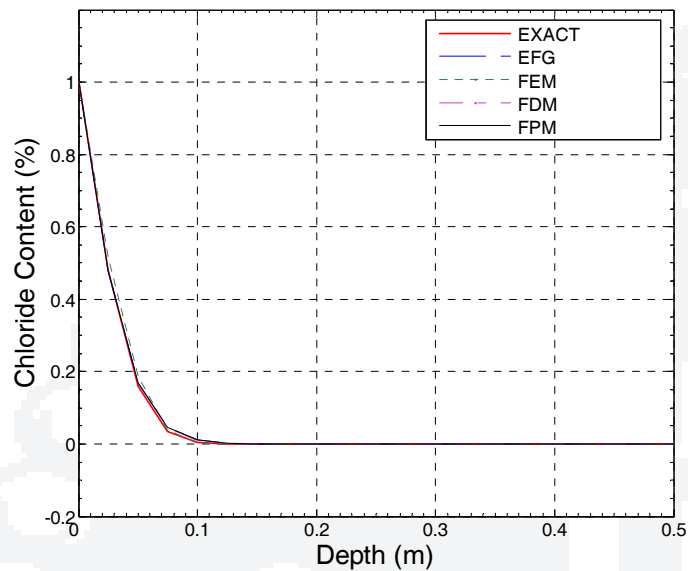


C_t مقدار کلر لازم برای آغاز خوردگی در بتن
مقدار دمای سالانه ثابت و برابر با ۲۰ درجه سانتی گراد
و m_c برابر با صفر فرض شده است.

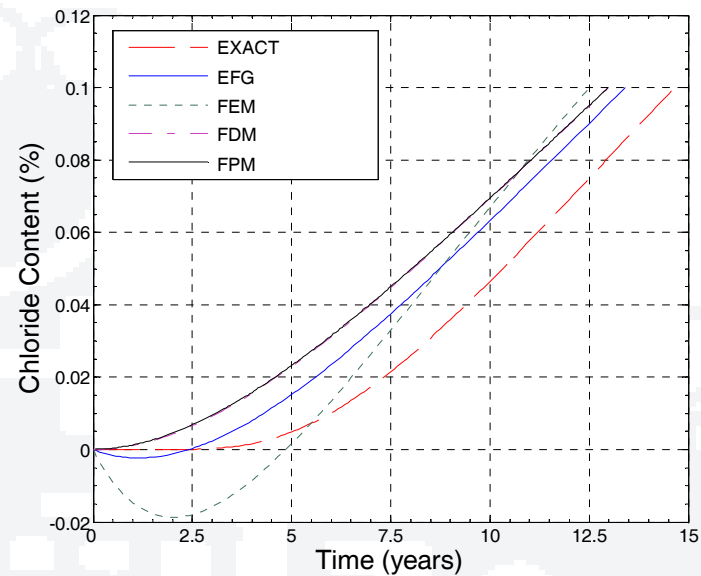
$$L_2 = \left[\int_{\Omega} (C_{exact} - C^h)^T (C_{exact} - C^h) d\Omega \right]^{1/2}$$

	Number of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
L_2 error%	21	0.1897	0.1678	0.4984	0.1879
	101	0.009	0.008	0.0216	0.008

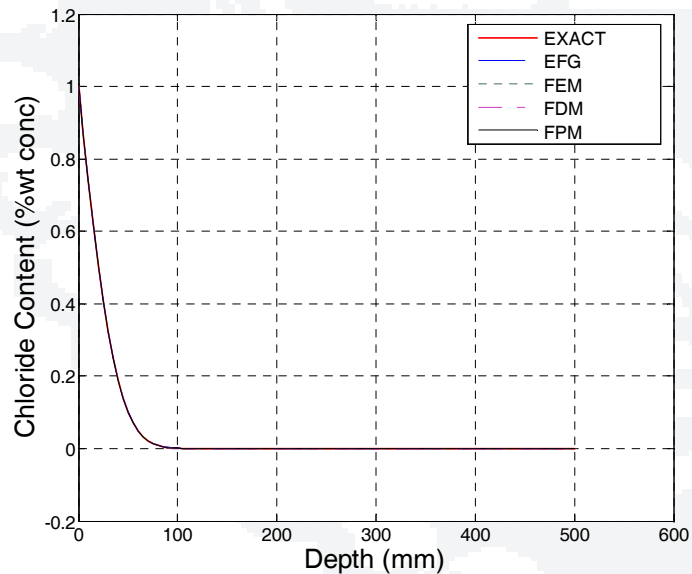
خطای L_2 برای مقدار یون کلر بعد از ۲۰ سال



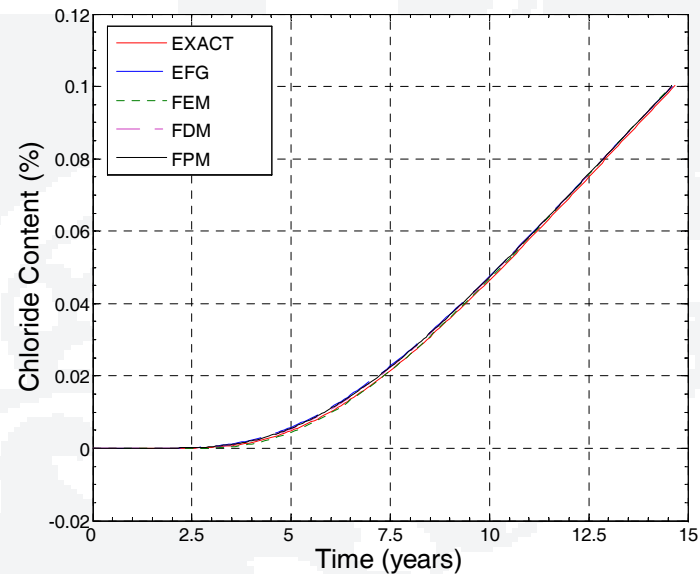
مقدار یون کلر در نیمی ا ز دال بتنی بعد
از ۲۰ سال (۲۱ نقطه)



مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متری بر
حسب زمان (۲۱ نقطه)



مقدار یون کلر در نیمی ا ز دال بتنی بعد
از ۲۰ سال (۱۰۱ نقطه)



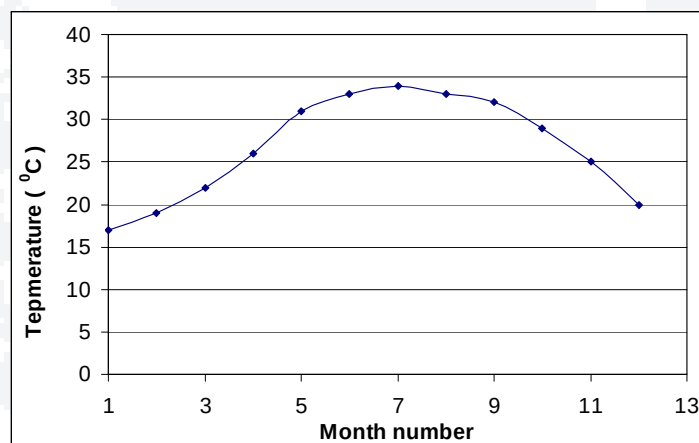
مقدار یون کلر در ضخامت ۱۰.۱ سانتی متری بر
حسب زمان (۱۰۱ نقطه)

	Number of nodes	FPM	Exact	EFG	FEM	FDM
Initiation Period (year)	21	12.98	14.7	13.4	12.5	13
	101	14.6	14.7	14.7	14.6	14.7

زمان شروع خوردگی برای ضریب انتشار ثابت

ضریب انتشار متغیر نسبت به زمان

مقدار m_c برابر با ۲/۰ فرض شده است

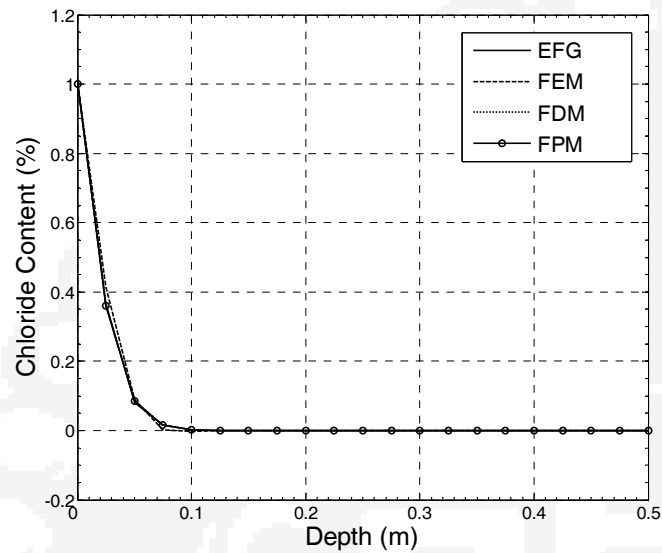


نمودار دمای سالانه بندرعباس

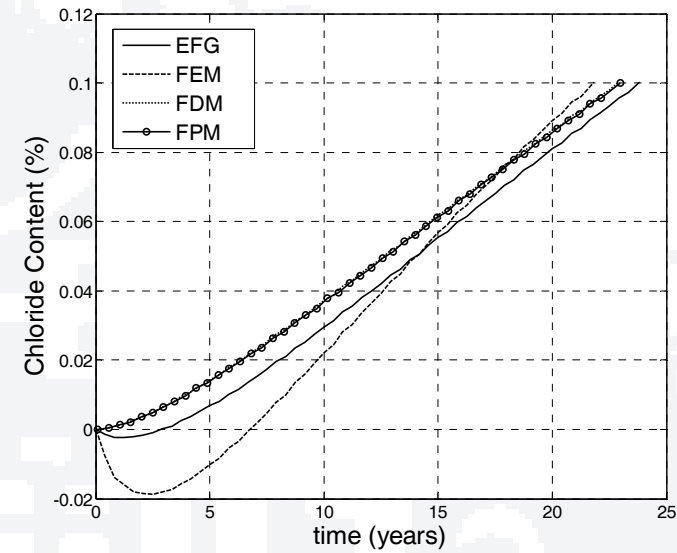
	Number of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
initiation period (year)	21	23	23.8	21.8	22.9
	101	26.5	26.5	26.5	26.5

زمان شروع خوردگی برای ضریب انتشار متغیر

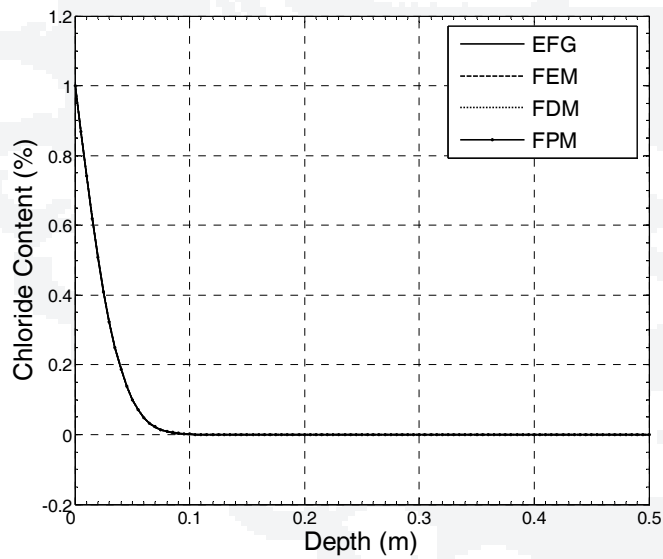
ضریب انتشار متغیر نسبت به زمان



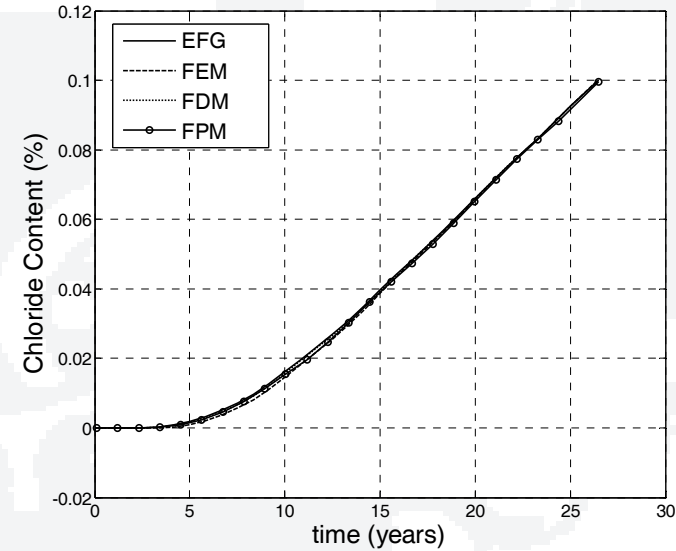
مقدار یون کلر در نیمی از دال بتنی بعد از ۲۰ سال (۲۱ نقطه)



مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متری بر حسب زمان (۲۱ نقطه)

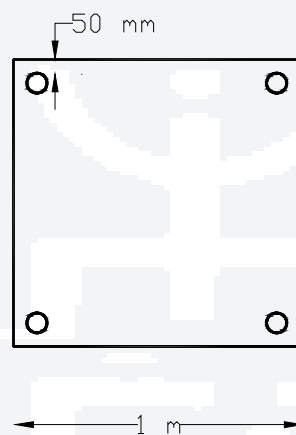
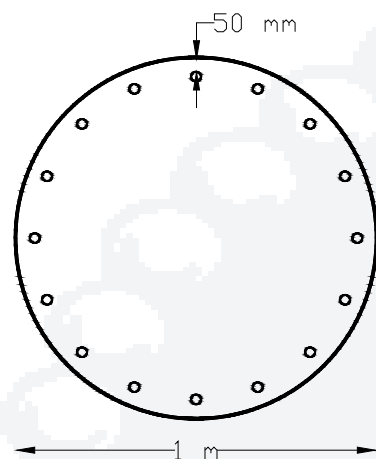


مقدار یون کلر در نیمی از دال بتنی بعد از ۲۰ سال (۱۰۱ نقطه)

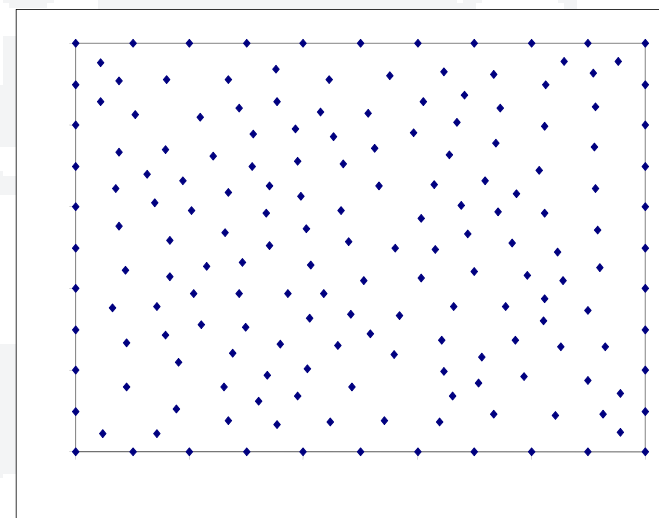


مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متری بر حسب زمان (۱۰۱ نقطه)

حالت دو بعدی



ستون بتنی با مقطعی به شکل مربع و دایره



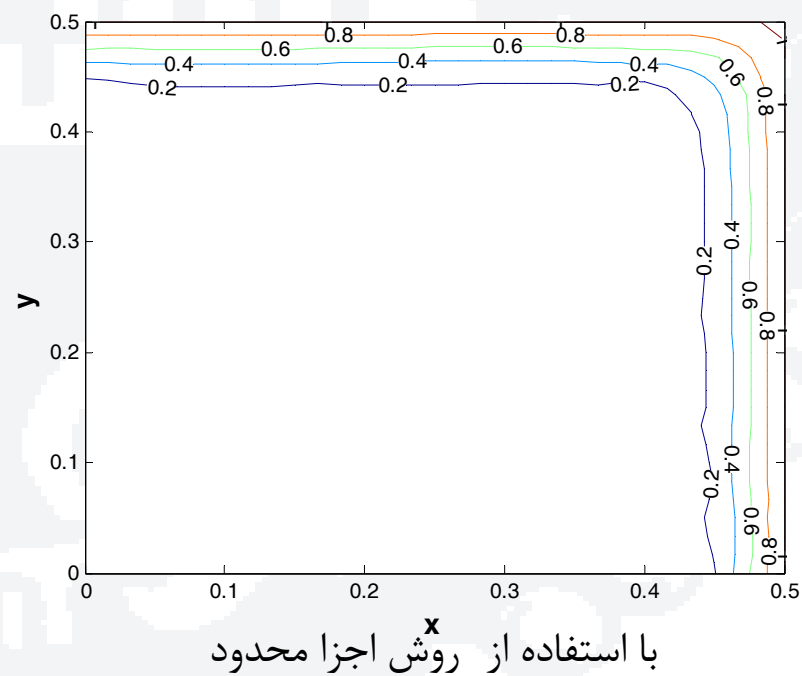
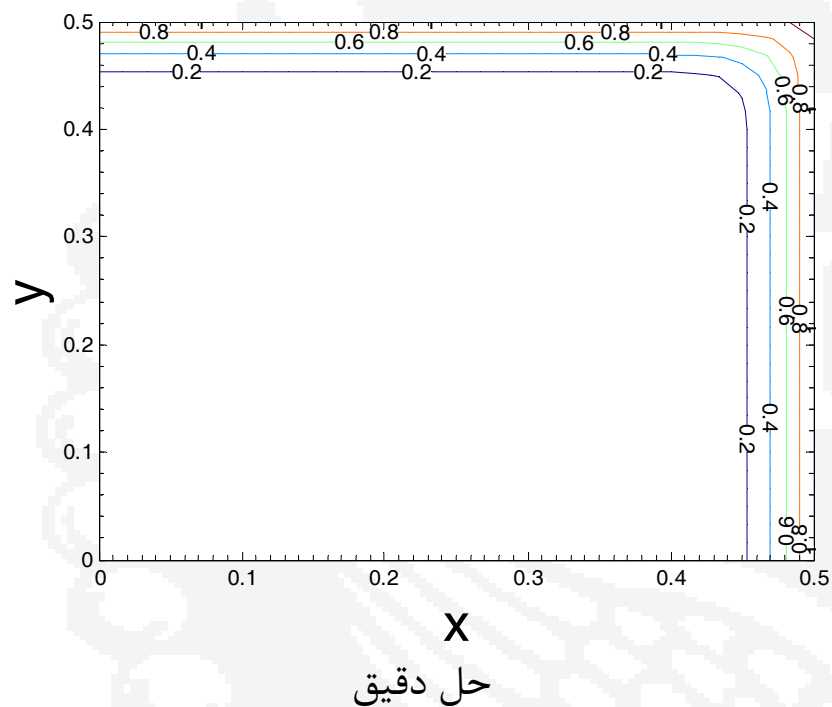
توزیع نقاط در یک چهارم از مقطع بتنی

Cover (mm)	D (m ² /s)	m	C _t %
50	10 ⁻¹²	0	0.1

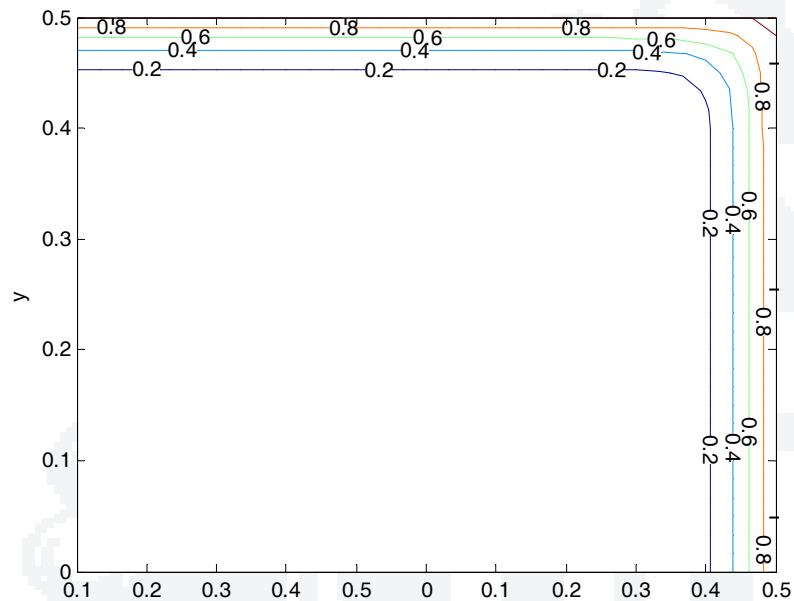
مشخصات ستون بتنی با مقطع مربعی و دایره ای شکل

مقطع مستطیلی شکل

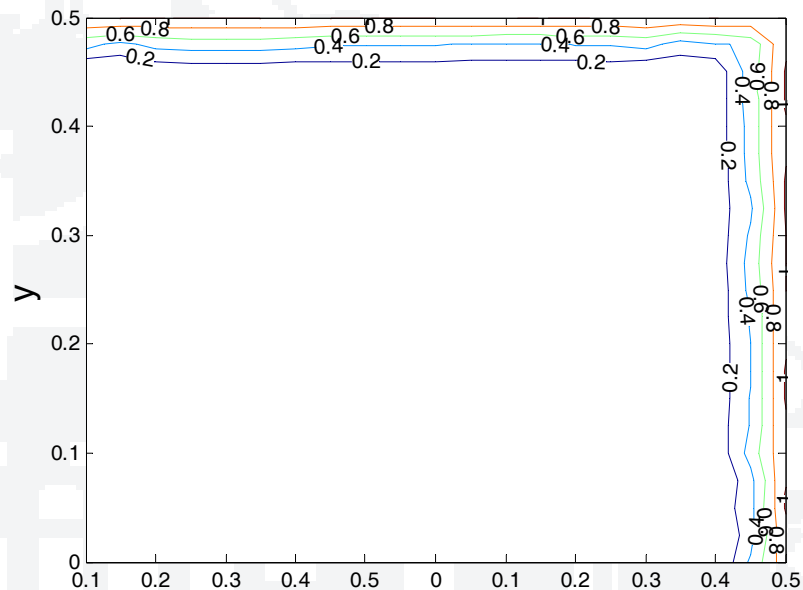
مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۱۸۵ نقطه)



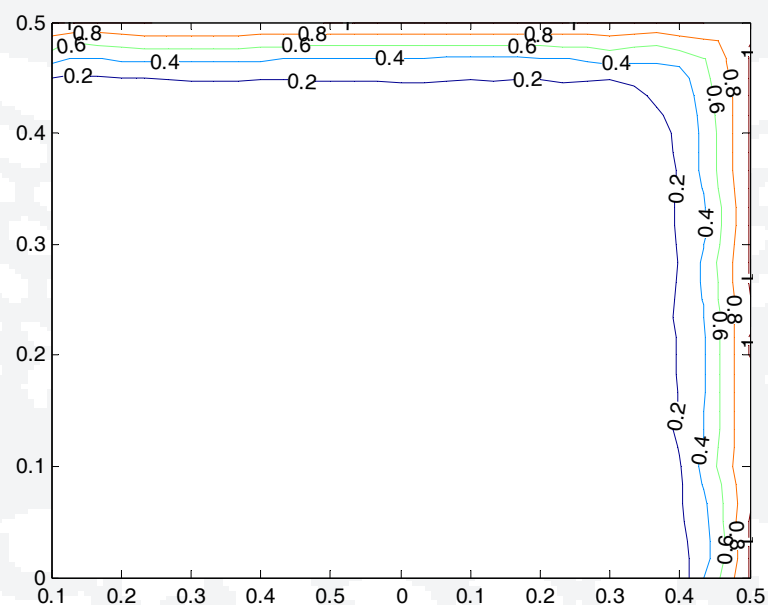
مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۱۸۵ نقطه)



با استفاده از روش تفاوتهای محدود

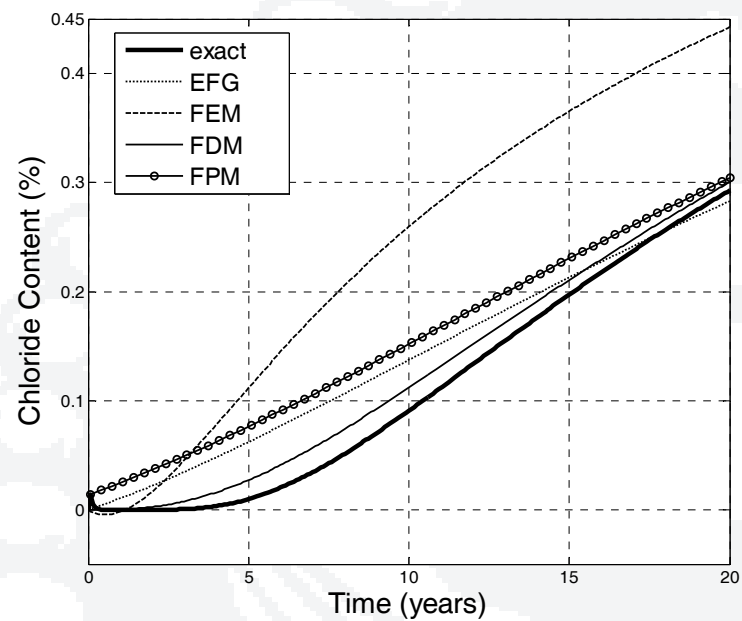


با استفاده از روش بدون المان گالرکین

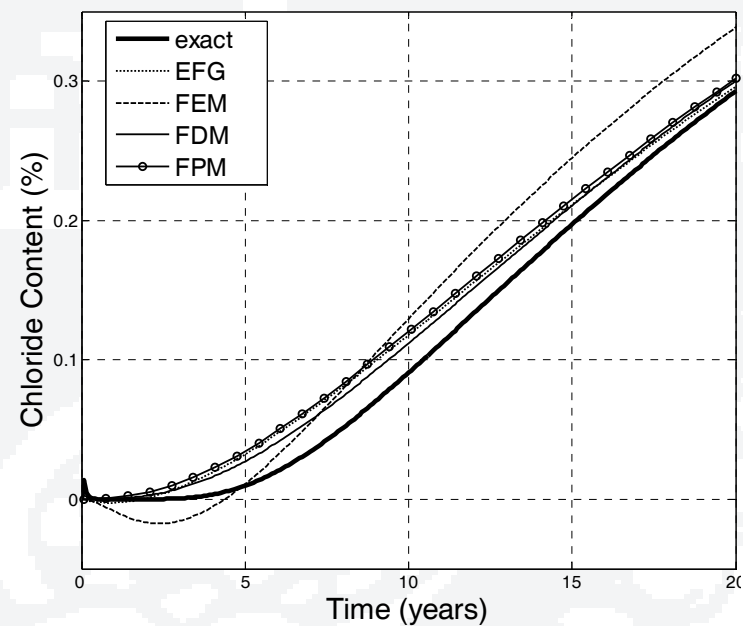


با استفاده از روش نقاط محدود

مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتری بر حسب زمان با ضریب پخش ثابت



۱۸۵ نقطه



۶۹۷ نقطه

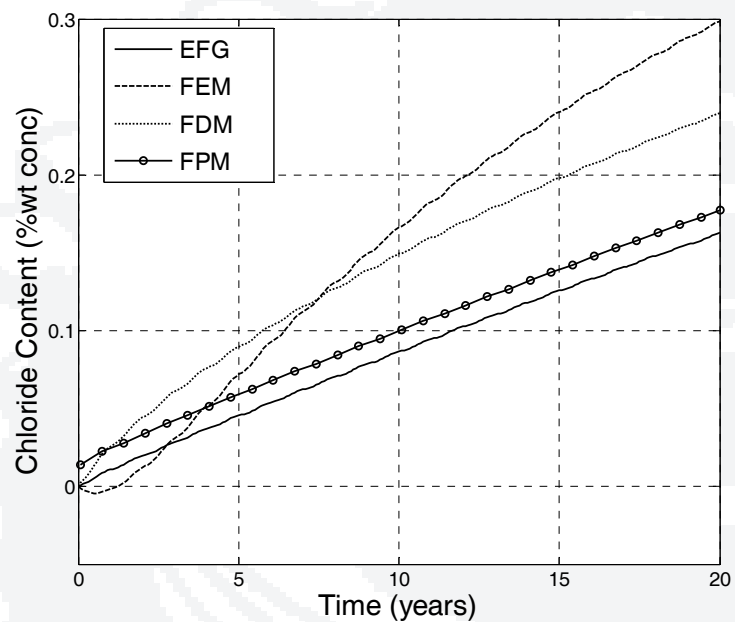
	Number of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
L_2 error%	185	0.46	0.73	1.42	0.73
	697	0.11	0.27	0.46	0.086

خطای L_2 در زمان $T=20$ ، برای مقطع مربعی شکل با ضریب پخش ثابت

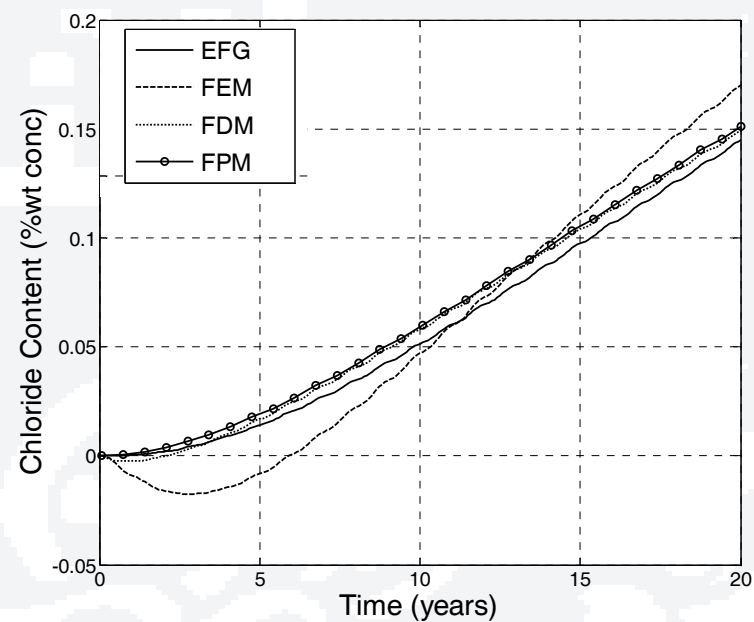
	Number of nodes	FPM	Exact	EFG	FEM	FDM
Initiation Period (year)	185	6.7	10.5	7.58	4.67	4.33
	697	9	10.5	9.08	8.83	9.42

زمان شروع خوردگی آرماتور در عمق ۵۰ میلیمتر برای مقطع مربعی شکل با ضریب پخش ثابت

مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتری بر حسب زمان با ضریب پخش متغیر



۱۸۵ نقطه



۶۹۷ نقطه

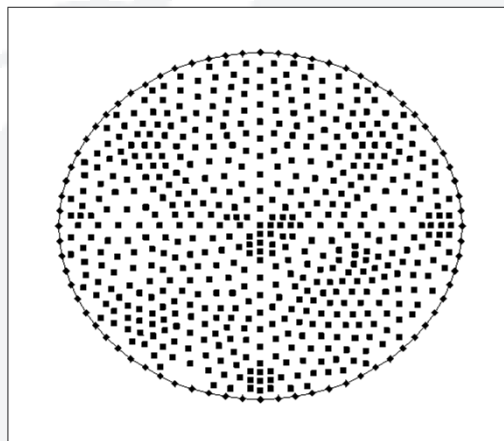
	Number Of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
Initiation Period (year)	185	10	11.75	6.5	5.75
	697	14.23	14.67	14.25	15.42

زمان شروع خوردگی آرماتور در عمق ۵۰ میلیمتر برای مقطع مربعی شکل با ضریب پخش متغیر

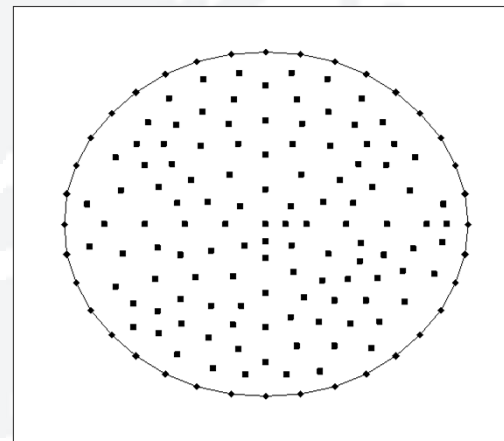
	FPM	EFG
Computing time (sec)	26	67

زمان حل برای حل مساله دوبعدی انتشار یون کلر با ضریب پخش متغیر برای ۶۹۷ نقطه

مقطع دایره ای شکل

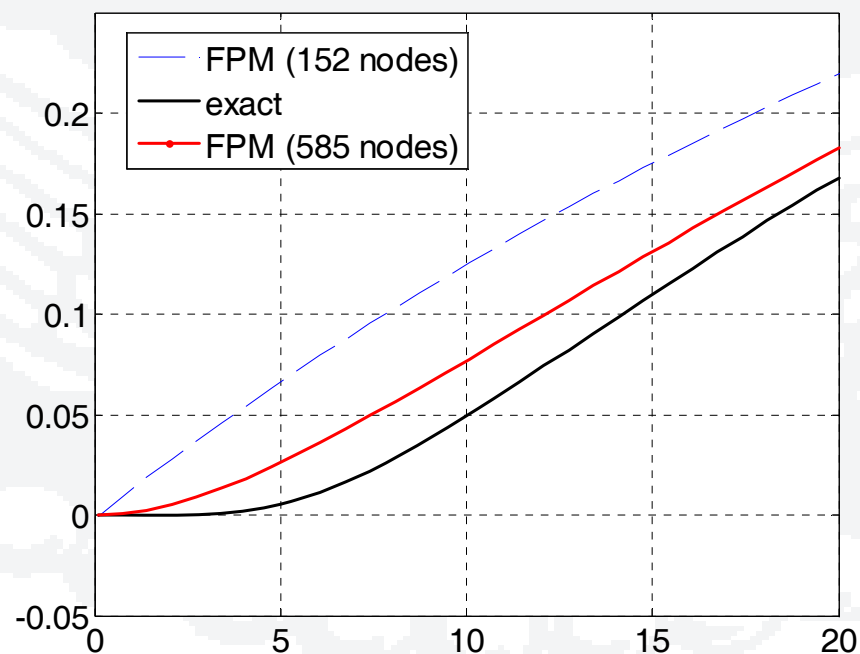


۵۸۵ نقطه



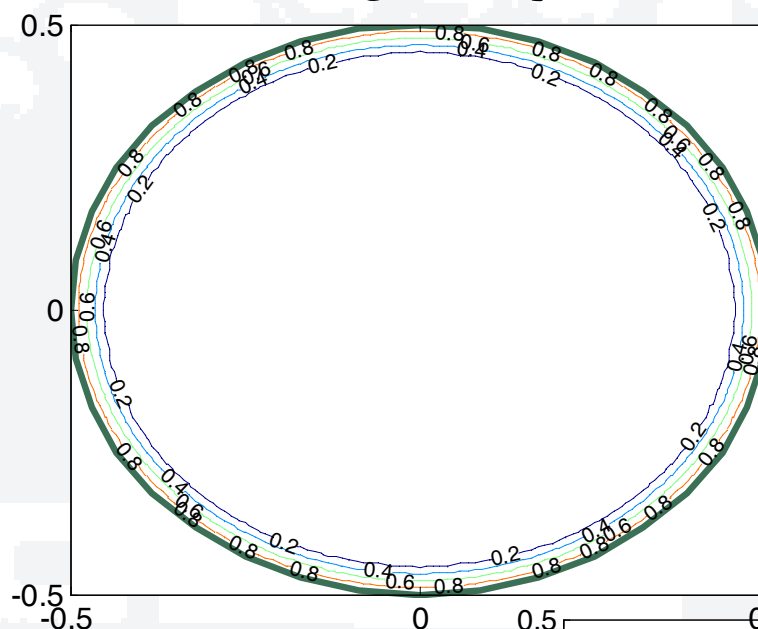
۱۵۲ نقطه

توزیع نقاط برای مقطع دایره ای شکل

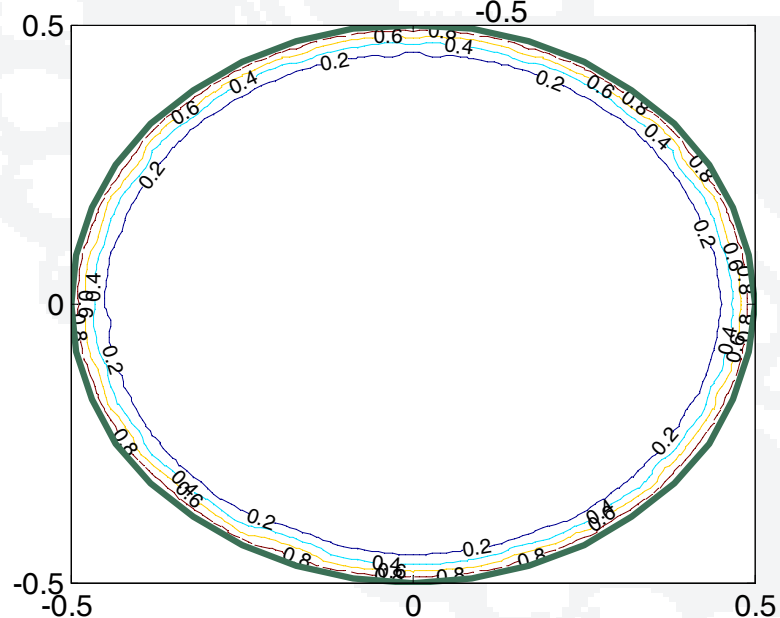


مقدار یون کلر در عمق ۵۰
میلیمتری بر حسب زمان با
ضریب ثابت

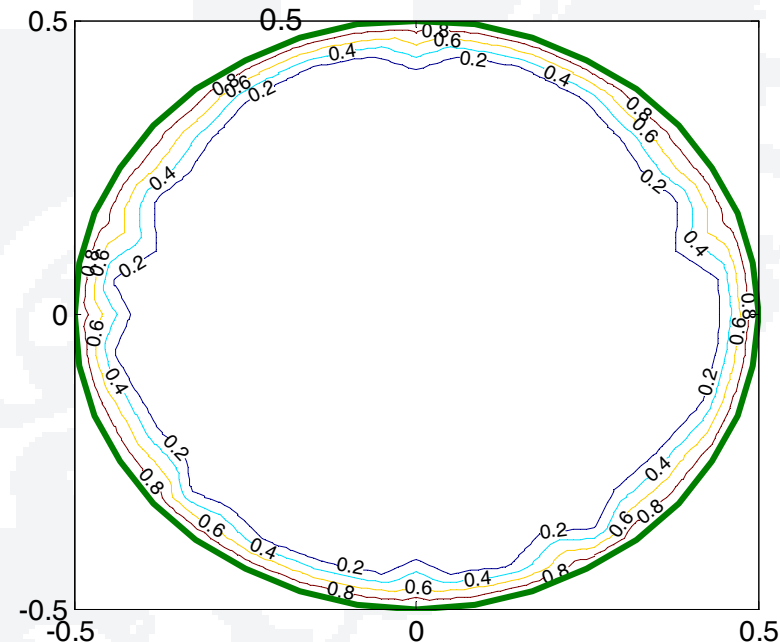
مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال



حل دقیق



با استفاده از روش نقاط محدود (۵۸۵ نقطه)



با استفاده از روش نقاط محدود (۱۵۲ نقطه)

	L_2 error%	initiation period (year)
FPM (152 nodes)	0.0532	7.8
FPM (585 nodes)	0.0039	12.15
exact	-----	14.2

خطای L_2 و زمان شروع خوردگی آرماتور در عمق ۵۰ میلیمتر
برای مقطع دایره ای شکل با ضریب پخش ثابت

